

3. HEMELMECHANICA

(Orbital Mechanics)

Isaac Newton (1642-1727)

1665 *Annus Mirabilis*

Wetten v. d. *Mechanica*

(ook: Galileo, Huygens)

Gravitatiewet

(ook: Bullialdus, Hooke)

Infinitesimaalrekening

(tegelijkertijd: Leibniz)

Optica



Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
(1687) en *Opticks* (1704)

Wetten van Newton

Impuls (*momentum*)

N1 Als $\vec{p} = 0$ dan is $\vec{p}$ constant

N2 Als $\vec{F} \neq 0$ dan is $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

N3 Actie + Reactie = 0, $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Als m constant, dan N2 $\rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$

Draai-impuls (*angular mom.*) $\vec{L}$

N2 $\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$ met **moment** (*torque*) $\vec{\tau}$

Gravitatiewet

Twee puntdeeltjes (of homogene bollen) met massa's m_1 en m_2 op afstand r oefenen een aantrekkende kracht op elkaar uit ter grootte

met gravitatieconstante G

=

Doel: Wetten van Kepler hieruit afleiden
(in volgorde **K2**, **K1**, **K3**)

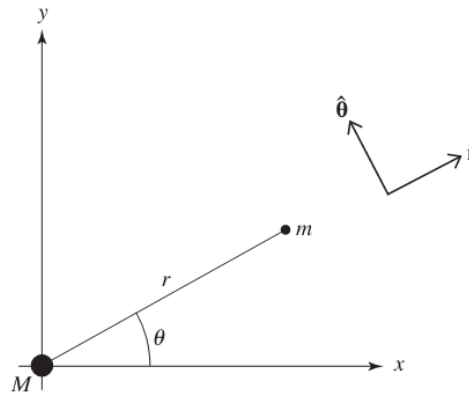
Poolcoördinaten (r, θ)

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \theta = \arctan y / x$$

Eenheidsvectoren in r - en θ -richting:

,



Copyright © 2010 Pearson Education, Inc.

Poolcoördinaten (2)

Let op! : $\underline{\quad}$ en $\underline{\quad}$ hangen van $\underline{\quad}$ af $\rightarrow$

$\underline{\quad}$, $\underline{\quad}$

Als $\underline{\quad}$ van t afhangt dan (kettingregel!)

$\underline{\quad}$

Opg: Ontbind de willekeurige vector $\vec{\quad}$ in r - en ϕ -componenten. Doe dit i.h.b. voor de positie- en snelheidsvector

Tweelichamenprobleem

Dubbelster (*binary star*) , 'Aarde en Zon'

, $j = 1$ of 2 , bewegen o.i.v. zwaartekracht

Positie - vectoren $(\quad)$ Laat t vaak weg!

Snelheidsvectoren $=$ $\leftarrow$ t -afgeleide

Kinetische energie $K = K_1 + K_2$

Potentiële energie U ————

Totale energie $E = K + U$ is **constant**

Tweelichamenprobleem (2)

Zwaartepuntsysteem (*Center of Mass System*)

Totale massa $\mathcal{M} = m_1 + m_2$

Gereduceerde massa $\mu = m_1 m_2 / \mathcal{M}$

Positievector v. **Z**punt $\rightarrow$

Relatieve positievector

Snelheidsvector **Z**punt $\rightarrow \rightarrow$

Relatieve snelheidsvector

In 't **Z-systeem** geldt (verifieer!)

$$K = \frac{1}{2} \mathcal{M} V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2, \quad U = -G \mathcal{M} \mu / r$$

Z beweegt eenparig! (Vgl College Mechanica)

Alleen *relatieve* beweging is van belang!

Tweelichamenprobleem (3)

Totale energie v.d relatieve beweging is constant

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\mathcal{M}\mu/r = \text{const.}$$

Één 'lichaam' μ loopt om centrum met $\mathcal{M}$

Los dit op + ga terug naar 'normale' ref.-systeem

... maar er is nog een behouden grootheid!

Definieer **Totale impulsmoment** $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Opg: Laat zien dat dit gelijk is aan

In 'n centraal krachtveld is $\vec{L}$ behouden!

Tweelichamenprobleem (4)

→ heeft vaste richting & grootte en
De beweging ligt dus in een vlak!

$A(t)$ = door voerstraal bestreken oppervlak

Na Δt is toename van A 'n driehoekje dus

– (basis) (hoogte) – →

— = const. Dit is **K2** !

Baan (*orbit*)

Elimineer t tussen $r(t)$ en $\theta(t) \rightarrow$ Baan $r(\theta)$

Nu is $\frac{dr}{dt}$ en $\frac{d\theta}{dt}$, dus

Bewegingsvgl. $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \rightarrow$ —

Vermenigvuldig links en rechts met

Gebruik links $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$ en rechts

Dus $\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = 0$ met

Tweelichamenprobleem (5)

Integreer over t en kies $t = 0$ in 't perihelium

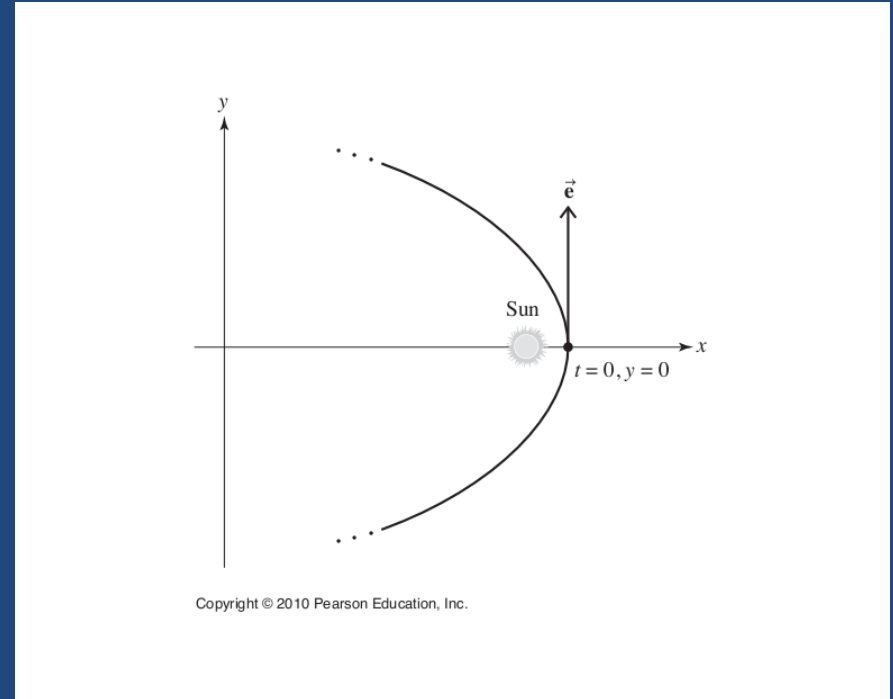
=

met integratieconst. e

'Dot product' met $\rightarrow$

=

Met $= / \rightarrow$



$\text{---} = 1 +$

dus $1/r$ oscilleert met θ

Tweelichamenprobleem (6)

Of ook $r = \text{_____}$ (1)

Zo'n r - θ -relatie beschrijft een '**kegelsnede**'



Circle



Ellipse



Parabola



Hyperbola

Tweelichamenprobleem (7)

Als $\mathcal{M}$ dan $\approx$ en $\approx$

Ryden behandelt alleen dit speciale geval
en schrijft M voor en m voor

We hebben (meer dan) $K1$ gevonden:

In het $N=2$ - probleem zijn
ellipsen (of cirkels) de **gesloten** banen, maar
hyper- (of para)-bolen zijn **open** banen!

Opg: Wat zijn en als $=$? Baan?

Tweelichamenprobleem (8)

Ellips $r =$ _____ [Zie boek voor bewijs]

Vgl. (1) $\rightarrow$ _____ (2)

Eccentriciteit _____

Ap & perihelium ()

(Snelheid)² daar _____

Tweelichamenprobleem (9)

Na 1 omloop is $A(P) = \pi ab$ (Vgl. Cirkel) $\rightarrow$

— — (K2)

Kwadrateer dit en gebruik (2) en (3)

— K3 ! (Vgl. 3.53)

Meet P en $a \rightarrow$ Bereken

Zon

[Ik schrijf K3 ook als]

Sections 3.2 - 3.4

- Thuis lezen – ook WC -- vragen stellen.

4. HET SYSTEEM AARDE-MAAN

of algemener

Tweede-orde Zwaartekrachtseffecten

Vgl. 4.12-17 van 4.2 in 't WC ; 4.4 al af; 4.6 tot vgl. 4.53

Tweede-orde Zwaartekrachtseffecten

Hemellichamen zijn

- Geen puntdeeltjes
- Niet perfect bolvormig (afplatting)
- Vaak met meer dan twee ($N > 2$)

Dit leidt tot 'tweede-orde-effecten':

- Precessie van rotatieas
- Getijden
- Storingen (*perturbations*) voor $N > 2$:
- Banen zijn géén ellipsen: Periheliumprecessie

[$N > 2$ probleem heeft géén analytische oplossing]

4.1 Afplatting en Precessie

Rotatie $\rightarrow$ Ellipsoïde met afplatting $f = (a - b)/a$

Opg. Vind relatie tussen f en eccentriciteit e

Aarde: $a \approx 6378$ km, $b \approx 6357$ km $\rightarrow f \approx 1/300$

Vraag : Voor welke planeet is f het grootst?

Antwoord:

Saturnus (hier '*edge-on*') heeft $f \approx 1/10$



MacLaurin Ellipsoïde

MacLaurin (1742) gaf $\omega^2/G\rho$ als functie van e -
(Geen details)

Opg : Laat zien dat $\omega^2/G\rho$ dimensieloos is.

En wat is de dimensie van e ?

(Waarom gaf ik deze opgave?)

Precessie

Aarde heeft 'n 'zwembandje' en is 'n 'peertje'

(maar ze is toch mooi)

Hoek ecliptica & equator-vlak = 23.5°

Zon & Maan trekken aan

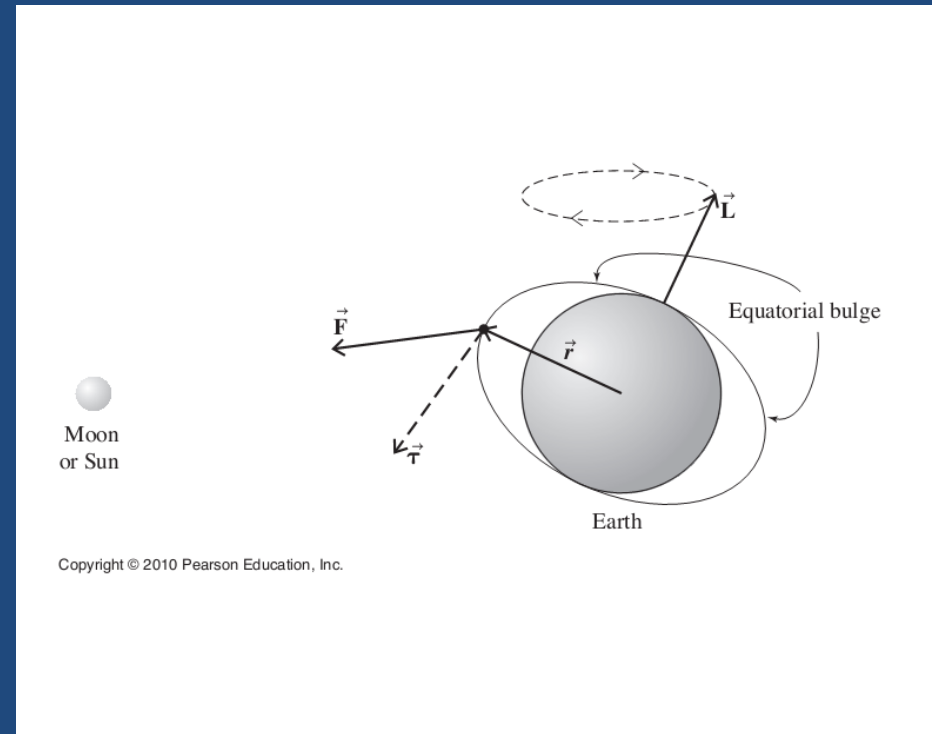
'zwembandje'. $\vec{r} = \vec{r}$ dus
 $\vec{r}$

draait op een kegel!

Zon $16''/\text{yr}$, Maan $34''/\text{yr}$

Tot. $50''/\text{yr}$, $P \approx 26 \text{ kyr}$

Hipparchus, Newcomb, ...



Precessieperiode (extra)

Relevante component , gemiddeld over 'n baan:

$$T = 3Gm (C - A) \sin 2\varepsilon$$

m = storende massa (Zon of Maan) ,

ε = hoek ecliptica & equatorvlak,

C = traagheidsmoment v. Aarde om as

A = traagheidsmoment v. Aarde om lijn $\perp$ as.

Precessie-hoeksnelheid en -periode zijn dan

$$\omega_p = 3Gm (C - A) / C \cos \varepsilon , \quad P_p = 2\pi / \omega_p$$

J.G. Williams, [The Astronomical Journal](#) **108** (1994) 711

Periheliumprecessie (*apsidal precession*)

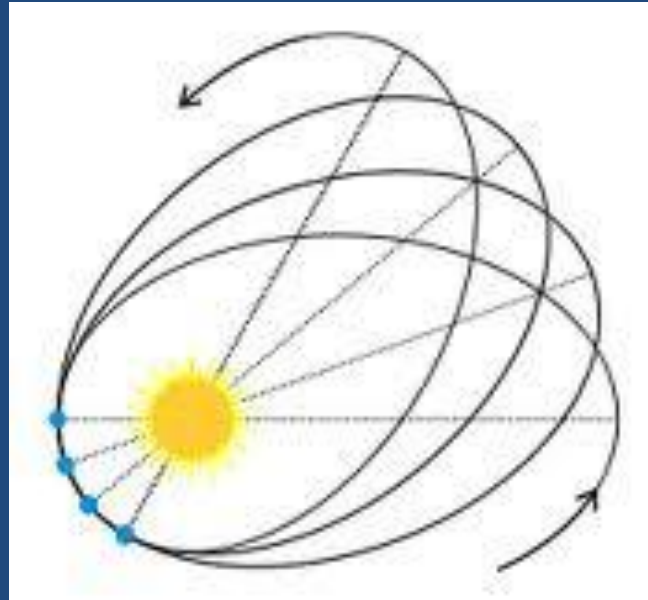
Door de storing van de 'lastige buren' volgt elke planeet (langzaam!) een **rozet**

Aarde: $11\frac{1}{2}''/\text{yr}$

Periode ≈ 100 kyr

Mercurius: Verschil met voorspelling gebaseerd op Newton is $43''$ per *eeuw*.

Einsteins **Algemene Relativiteitstheorie** verklaart deze discrepantie!



M. Stewart, *American Journal of Physics* **73** (2005) 730

Milankovic-cycli

Eccentriciteit $0 < e < 0.05$ met periode $P \approx 100$ kyr

Nutatie van aardas $21.5^\circ < \alpha < 24.5^\circ$ met $P \approx 41$ kyr

Precessie v. aardas (zie eerder) met $P \approx 26$ kyr

Wat is het belang van deze periodes voor ons?

Berger & Loutre, *Insolation values for the climate of the last 10 million years*, Quaternary Science Reviews **10** (1991) 297-317

Getijden

Equipotentiaal : Oppervlak waarop V const. is
Voor bolvormig lichaam : concentrische bollen
Nabij object vervormt de equipotentiaalen.
Dit heet **getijdenwerking** (*tidal action*)

Aarde & Maan. Water :

Vloed (*flood tide*) : periode v. stijgend water

Hoogtij: moment v. hoogste water

Eb (*ebb tide*): periode v. dalend water

Laagtij (*low tide*): moment v. laagste water

Hoogtij komt elke , dito laagtij

Bay of Fundy (CAN)



(a)



(b)

Copyright © 2010 Pearson Education, Inc.

(Ook atmosfeer en aardkorst reageren!)

Getijden (2)

Zon en Maan dragen bij

Springtij (*spring tide*): Hoek Z & Maan 0 of 180°

Doodtij (*neap tide*): Hoek Zon & Maan 90°

Galilei en Descartes fout.

Newton (1687) gaf correcte uitleg.

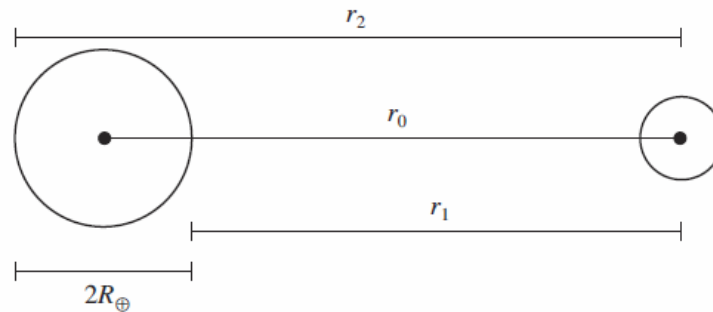
Evenwichtstheorie Daniel Bernoulli (1740) -
(‘Matteüseffect’)

Dynamische theorie Laplace (en vele anderen)

Getijden (3)

Kracht door Maan op testmassa m (op Aarde)

() —



Copyright © 2010 Pearson Education, Inc.

Getijden (4)

Als $r_0 \gg R_1$ dan is deze **Taylorreeks** OK:

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^3 = \left(1 + \frac{r - r_0}{r_0} \right)^3$$

met $\left(\frac{r}{r_0} \right)^3 \approx 1 + 3 \frac{r - r_0}{r_0}$ — derde macht!

Getijdeverwekkende kracht (*differential tidal force*) =

Variatie over 1 v. zwaartekracht dóór M op test m =

$$\Delta F(r) \equiv F(r) - F(r_0) \approx (r - r_0) 2G \frac{Mm}{r_0^3}$$

In verste en nabijste punt $r_{\pm} = r_0 \pm R_1$ geldt dus

$$\Delta F(r_{\pm}) \approx \pm 2GR_1 \frac{Mm}{r_0^3}$$

Getijden (5)

1 = Aarde, 2 = Maan *of* Zon. Verhouding Z/M

$$\frac{\Delta F_Z}{\Delta F_M} = \frac{M_Z r_{AM}^3}{M_M r_{AZ}^3} \approx 0.44$$

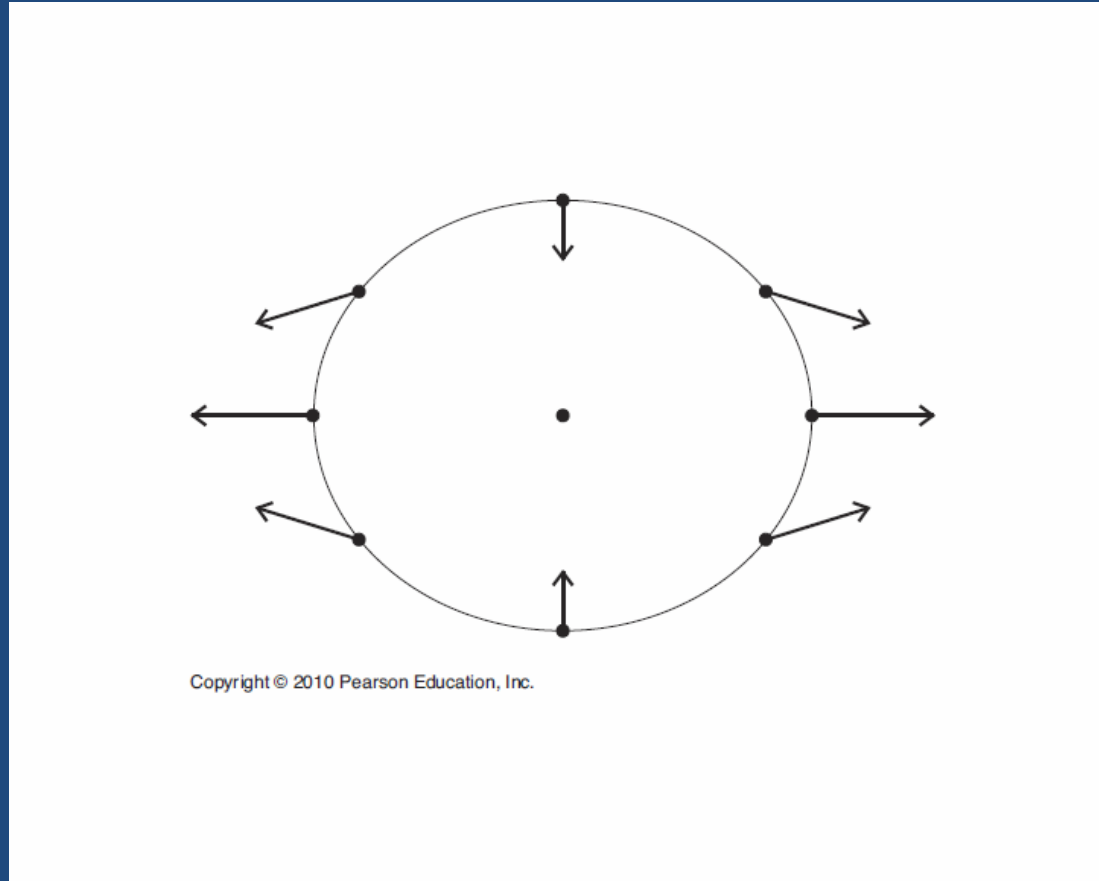
$M_Z = 27 \times 10^6 M_M$ maar 3^e macht van 2.5×10^{-3} wint.

NB: Straal & massa van Aarde doen er niet toe.

WC-opg: Variatie van ΔF over hele oppervlak

$$\Delta \vec{F} \approx GR_1 \frac{Mm}{r_0^3} (2\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta)$$

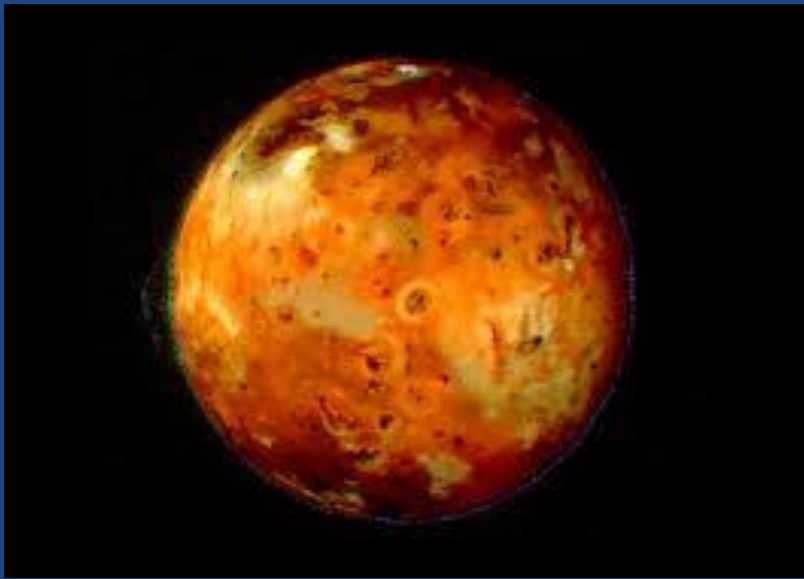
Getijden (6) 'Pijnbank'



Ken je een beroemd voorbeeld in ons Zonnestelsel?

Io Getijden (7)

‘Pizzamaan’ **Io** met ~ 400 vulkanen die SO_2 spuwen. Getijdewerking v. Jupiter verhit Io !



Getijden (8)

Getijdewerking door lichaam j op lichaam k

$$GW(j \text{ op } k) = 2G \frac{m_j r_k}{r^3} \quad \text{dus verhouding}$$

$$GW(1 \text{ op } 2) / GW(2 \text{ op } 1) = \frac{m_1 r_2}{m_2 r_1} \approx \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \quad \text{mits ...}$$

“Kleinste krijgt de hardste klappen”

Aarde-Maan: $GW_{A \text{ op } M} / GW_{M \text{ op } A} \approx 14$,
eigenlijk ≈ 20

Synchrone Rotatie Getijden (9)

Geen water op Maan (jammer!) maar door **getijderemming** (*tidal braking*) is

$$P_{\text{as}} = P_{\text{baan}} = 27\frac{1}{3} \text{ d (sid.)}$$

We zien steeds dezelfde kant van de Maan!

[Fout: *Dark side of the Moon*]

Stabiel door 'terugkoppeling' (*feedback*)

Duurt lang tot Aarde synchroon zal draaien

Roche-limiet Getijden (10)

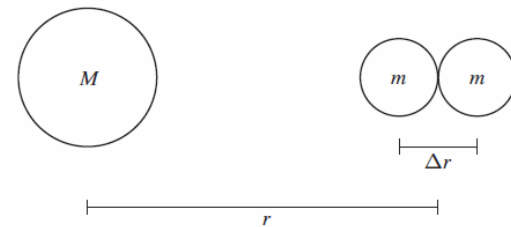
Getijdewerking bepaalt de *kleinste* afstand

Roche-limiet $r_R =$

kleinste veilige afstand

$\approx 2.5 R$. Bij $r < r_R$:

GW groter dan zelf-
zwaartekracht van
het 'kleintje'

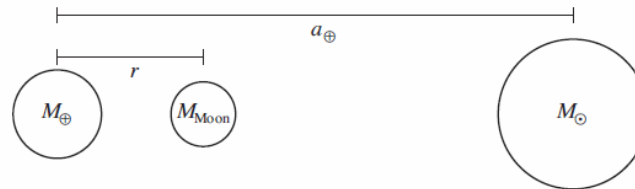


Copyright © 2010 Pearson Education, Inc.

Ken jij een beroemd voorbeeld?

Hill-radius Getijden (11)

Getijdewerking bepaalt de *grootste* afstand



Copyright © 2010 Pearson Education, Inc.

Hill-radius r_H = grootste r waarop m_1 en m_2 nog gebonden blijven oiv GW van m_3 ($m_1 < m_2 < m_3$) op afstand $a \gg r$

Getijden (11)

Bij $r > r_H$ 'steelt' de GW v.d. 'dikke' het 'kleintje'

$$r_H = \left(\frac{m_2}{2m_3} \right)^{1/3} a$$

NB : Massa van 'kleintje' doet er niet toe.

Voor Maan-Aarde-Zon: $r_H \approx 0.01$ AU

Maan is voorlopig 'van ons'

Getijdenwerking belangrijk in dubbelsterren

[Lees par. 4.5 over Libratie v.d. Maan

Lees par. 4.6 over *Eclipses* tot aan vgl. 4.53]